L3 SM UE604P **Université de Tours** **Année 2011-2012**

Méthodes mathématiques pour la physique

25/04/2012 **durée de l'examen: 2h**

1. Soient L, M deux opérateurs différentiels
$$L = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, \qquad M = c(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + d(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$
agissant sur les fonctions de x, y. Calculer le commutateur $[L, M]$.

2. Soit $f(\theta,\varphi) = \cos^2\theta\cos^2\varphi$. Considérons la décomposition de f dans la base d'harmoniques sphériques:
$$f(\theta,\varphi) = \sum_{\ell,m} \alpha_{\ell,m} Y_\ell^m(\theta,\varphi).$$
   - Pour quelles valeurs de m les coefficients $\{\alpha_{\ell,m}\}$ peuvent être non-nuls? Pourquoi pas pour d'autres?
   - Trouver $\alpha_{\ell,0}$ pour tout ℓ.

3. Considérons l'équation de Schroedinger stationnaire pour une particule en 3D dans un potentiel coulombien:
$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{\alpha}{r}\right)\psi(r) = k^2\psi(r).$$
Etudier les comportements asymptotiques admissibles des solutions de cette équation lorsque a) $r \to 0$ et b) $r \to \infty$. En particulier, dans le développement
$$\psi(r\to\infty) = r^\gamma e^{P(r)}\left[1 + \frac{\beta}{r} + O\left(r^{-2}\right)\right].$$
on donnera les expressions pour $P(r)$, β et γ en fonction de ℓ, α et k.

4. Soit $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un ensemble d'opérateurs vérifiant les relations de commutation
$$[a_n, a_m] = n\delta_{m+n,0}.$$
Montrer que les opérateurs
$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n-m}a_m, \qquad n \neq 0$$
$$L_0 = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n>0} a_{-n}a_n,$$
vérifient
   - les relations de commutation suivantes avec $\{a_n\}$:
$$[L_n, a_{-m}] = m a_{n-m}, \qquad m,n\in\mathbb{Z}.$$
   - l'algèbre de Virasoro:
$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3 - n)\delta_{n+m,0}, \qquad m,n\in\mathbb{Z}.$$
   Trouver la valeur de la constante c (appelée la charge centrale).

Indications: Pour calculer $[L_n, L_{-n}]$, on pourra utiliser la représentation équivalente suivante:
$$L_n = \frac{1}{2}\sum_{m>0} a_{n-m}a_m + \frac{1}{2}\sum_{m\leq 0} a_m a_{n-m}.$$